

## Übungen zu „Prinzipien von Programmiersprachen“ Blatt 2

In der Vorlesung haben wir die Semantik von Bindungen mit Hilfe der *Substitutionssemantik* erklärt.

$$\frac{e_1 \Downarrow v_1 \quad e_2[x \mapsto v_1] \Downarrow v}{\mathbf{let\ val\ } x = e_1 \mathbf{\ in\ } e_2 \Downarrow v}$$

Die Semantik ist von einer realen Implementierung weit entfernt, da Terme auch bei Wertebindungen wiederholt ausgerechnet werden (siehe Aufgabe 7). Typischerweise werden die Werte von Variablen nicht substituiert, sondern in einer geeigneten Datenstruktur (Stack oder Heap) nachgeschlagen. Die folgende *Umgebungssemantik* modelliert diese Technik.

Eine *Umgebung*  $\rho$  ist eine stackartig organisierte Folge von Bindungen.

$$\begin{array}{l} \rho ::= \emptyset \\ | \rho, x \Downarrow v \end{array}$$

Der Wert einer Variablen wird in der Umgebung nachgeschlagen.

$$\frac{}{\rho, x \Downarrow v \vdash x \Downarrow v} \quad \frac{\rho \vdash x \Downarrow v \quad x \neq y}{\rho, y \Downarrow w \vdash x \Downarrow v}$$

Die Auswertungsrelation ist nunmehr dreistellig:  $\rho \vdash e \Downarrow v$  bedeutet “in der Umgebung  $\rho$  wertet  $e$  zu  $v$  aus”.

Wertebindungen legen den berechneten Wert in der Umgebung ab.

$$\frac{\rho \vdash e_1 \Downarrow v_1 \quad \rho, x \Downarrow v_1 \vdash e_2 \Downarrow v}{\rho \vdash \mathbf{let\ val\ } x = e_1 \mathbf{\ in\ } e_2 \Downarrow v}$$

**Aufgabe 7.** Werte den folgenden Term mit Hilfe der Substitutionssemantik aus.

$$\mathbf{let\ val\ } x = \mathit{succ}(\mathit{succ\ zero}) \mathbf{\ in\ } \mathit{add}(x, x)$$

Nehme an, dass *add* wie *zero* und *succ* vordefiniert ist. Was fällt Dir auf? *Hinweis:* der Beweisbaum kann auch linear notiert werden, indem die Knoten systematisch durchnummeriert werden.

**Aufgabe 8.** Zeige die Äquivalenz von Substitutionssemantik und Umgebungssemantik.

$$\emptyset, x_1 \Downarrow v_1, \dots, x_n \Downarrow v_n \vdash e \Downarrow v \iff e[x_n \mapsto v_n] \dots [x_1 \mapsto v_1] \Downarrow v$$

Beschränke Dich auf Boolesche Ausdrücke und Wertebindungen.

**Aufgabe 9.** Harry Hacker hat die Umgebungssemantik um folgende Regeln für die Auswertung von Abstraktionen und Applikationen erweitert.

$$\frac{\rho \vdash \mathbf{fun}(\mathbf{val} x : \tau) \Rightarrow e \Downarrow \mathbf{fun}(\mathbf{val} x : \tau) \Rightarrow e}{\rho \vdash e_1 \Downarrow \mathbf{fun}(\mathbf{val} x : \tau) \Rightarrow e \quad \rho \vdash e_2 \Downarrow v_2 \quad \rho, x \Downarrow v_2 \vdash e \Downarrow v} \rho \vdash e_1 e_2 \Downarrow v$$

Was ist von den Regeln zu halten? *Hinweis:* Bestimme die Bedeutung des folgenden Programms und vergleiche das Ergebnis mit dem der Substitutionssemantik.

```

let val  $f = (\mathbf{fun}(\mathbf{val} x : \mathit{Nat}) \Rightarrow \mathbf{fun}(y : \mathit{Nat}) \Rightarrow x)$  3
in let val  $x = 5$ 
in  $f x$ 

```