Institut für Informatik III
Universität Bonn
HD Dr. R. Hinze

Römerstraße 164
D–53117 Bonn
27. November 2003

Übungen zur „Deskriptiven Programmierung“

Blatt 6

Allein aus dem Typ einer polymorphen Funktion läßt sich eine Eigenschaft der jeweiligen Funktion ablesen. Diese Eigenschaft heißt das *freie Theorem* der Funktion. Zum Beispiel gilt für jede Funktion $m :: \forall\alpha\,.\,(\alpha \to \alpha) \to ([\alpha] \to [\alpha])$

$$\mathit{map}\ r \cdot m_A\ f = m_B\ f \cdot \mathit{map}\ r \quad \Longleftarrow \quad r \cdot f = f \cdot r$$

Hat φ den polymorphen Typ $\forall\alpha\,.\,\tau\ \alpha$, dann besagt das freie Theorem von φ, dass $(\varphi_A, \varphi_B) \in \tau\ R$ für alle Relationen $R \subseteq A \times B$. Hierbei wird der Typ von φ als binäre Relation gelesen.

$$\begin{aligned}
(f, g) \in R \to S \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall a, b\ .\ (a, b) \in R \Longrightarrow (f\ a, g\ b) \in S \\
((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (R, S) \quad &\Longleftrightarrow \quad (a_1, b_1) \in R \wedge (a_2, b_2) \in S \\
([a_1, \ldots, a_n], [b_1, \ldots, b_n]) \in [R] \quad &\Longleftrightarrow \quad (a_1, b_1) \in R \wedge \cdots \wedge (a_n, b_n) \in R
\end{aligned}$$

Zum Beispiel gilt für m, dass $(m_A, m_B) \in (R \to R) \to ([R] \to [R])$ für alle Relationen $R \subseteq A \times B$. Spezialisieren wir die Relation R zu einer Funktion r, dann erhalten wir die obige Aussage. *Beachte:* wenn $(a, b) \in R \Longleftrightarrow r\ a = b$, dann ist $(as, bs) \in [R] \Longleftrightarrow \mathit{map}\ r\ as = bs$.

Aufgabe 15. Wie lautet das freie Theorem von Funktionen des Typs

$$\forall\alpha\,.\,\alpha \to \alpha$$

Zeige, dass *id* die einzige Funktion dieses Typs ist.

Aufgabe 16. Wie lautet das freie Theorem von Funktionen des Typs

$$\forall\alpha\,.\,(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$$

Wieviele Funktionen dieses Typs gibt es? Lassen sich die Funktionen charakterisieren?

Aufgabe 17. Wie lautet das freie Theorem von Funktionen des Typs

$$\forall\alpha\ \beta\,.\,(\alpha \to \beta) \to ([\alpha] \to [\beta])$$

Leite aus dem freien Theorem die folgende Eigenschaft von *map* ab: $\mathit{map}\ (f \cdot g) = \mathit{map}\ f \cdot \mathit{map}\ g$ (das zweite sogenannte *Funktorgesetz*).

Aufgabe 18. Wie lautet das freie Theorem von Funktionen des Typs

$$\forall\alpha\ \beta\,.\,\beta \to (\alpha \to \beta \to \beta) \to [\alpha] \to \beta$$

Leite aus dem freien Theorem das ‘fusion’ und das ‘map-fusion’ Gesetz her.